

Modelagem otimizada de indicadores biológicos de qualidade da água

Optimized modeling of biological indicators of water quality


- **Data de entrada:**
29/11/2017
- **Data de aprovação:**
27/06/2018

Patrícia Neves Mendes^{1*} | Gabriel da Costa Cantos Jerônimo¹ | Luiz Felipe Ramos Turci¹ | Paulo Augusto Zaitune Pamplin¹


DOI: <https://doi.org/10.36659/dae.2020.011>

ORCID ID

Mendes P. N.  <https://orcid.org/0000-0002-0434-3241>

Jerônimo G. C. C.  <https://orcid.org/0000-0001-8204-7694>

Turci, L. F. R.  <https://orcid.org/0000-0001-7516-0963>

Pamplin, P. A. Z.  <https://orcid.org/0000-0001-7318-9121>

Resumo

O estudo de plantas aquáticas (macrófitas) é importante, uma vez que essas plantas apresentam potencial de utilização em estudos de ecotoxicologia, como bioindicadores no tratamento de águas residuárias. A modelagem criteriosa do crescimento dessas plantas, especificamente a *Lemna minor*, é útil na determinação das condições de otimização dessas aplicações; assim, deseja-se sempre obter o modelo que melhor represente a dinâmica de crescimento populacional da planta em estudo. Neste trabalho, apresenta-se uma metodologia de ajuste e seleção de modelos de crescimento não lineares com base em indicadores estatísticos que servem como avaliadores de qualidade dos modelos. Para ilustrar o uso da metodologia, foi feito o cultivo de *Lemna minor* em meio Steinberg e foram ajustados três modelos aos dados médios de crescimento de suas frondes, selecionando o modelo Logístico como o melhor.

Palavras-chave: Modelo de crescimento populacional. Avaliadores de qualidade. *Lemna minor*.

Abstract

The study of aquatic plants (macrophytes) is important since such plants present a potential utilization in ecotoxicology as bioindicators, as well in wastewater treatment. The criterious growth modelling of such plants, specifically *Lemna minor*, is useful for the determination of the optimal conditions of mentioned in applications - so one always looks for the best model that represents the dynamic of population growth of the plant in study. This work presents a methodology of adjustment and selection of nonlinear growth models based on statistical indicators, which work as quality evaluators for the models. To illustrate this methodology, *Lemna minor* was grown in Steinberg environment, and three models were fitted to the fronds growth data, the Logistic model was selected as the best model.

Keywords: Population growth model. Quality evaluators. *Lemna minor*.

¹ Instituto de Ciência e Tecnologia da Unifal (Universidade Federal de Alfenas). Alfenas (MG), Brasil.

* **Autor correspondente:** patricia.neves.mendes@gmail.com.

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, o estudo do crescimento populacional de macrófitas tem sido considerado muito importante, uma vez que essas plantas desempenham um papel fundamental nos ecossistemas aquáticos, quer seja como produtoras de gás oxigênio, quer seja como habitat para diversos organismos. Outra razão para o estudo de macrófitas é sua potencialidade de utilização no tratamento de águas residuárias (ARROYAVE, 2004; OZENGIN e ELMACI, 2007).

A utilização de macrófitas também se dá no campo da bioindicação, mais especificamente na eutrofização. A eutrofização é um processo natural caracterizado pelo aumento da quantidade de nutrientes inorgânicos e matéria orgânica em corpos hídricos. Wetzel (1993) descreve esse aumento como um dos estados de sucessão natural de um ecossistema aquático e que, conforme há o aumento da concentração de nutrientes, há também aumento na florescência de algas. Esse processo, quando ocorrido naturalmente, é lento e gradual; atividades antrópicas podem, no entanto, acelerar o processo e causar um desequilíbrio ecológico no corpo hídrico, caracterizando um impacto ambiental chamado eutrofização artificial, ou cultural (SOUZA, 1993).

Dentre as macrófitas mais abundantes em ecossistemas aquáticos, encontra-se a *Lemna minor*, mais conhecida como lentilha d'água, que é uma angiosperma, monocotiledônea que reconhecidamente apresenta alta capacidade adsortiva e, portanto, apresenta o potencial supracitado. Khellaf e Zerdaoui (2009), no estudo sobre a resposta do crescimento de *Lemna minor* sob condições de alta concentração de metais pesados, descrevem sua capacidade adsortiva como potencial hiperacumulador. O mesmo se observa no estudo de Jain et al. (1988), versado em acumulação de níquel (Ni), cobre (Cu) e manganês (Mn).

A utilização de macrófitas no campo da ecotoxicologia já está há tempos bem estabelecida, como cita Fiskesjö (1985), que aponta como justificativa para isso a sensibilidade das plantas aos poluentes ambientais e sua capacidade de acumulação, principalmente no que se refere aos metais pesados. No caso da macrófita *Lemna minor*, ela ganha destaque nos estudos de ecotoxicologia por ser seletiva na acumulação de certas espécies químicas, por causa do seu tamanho diminuto, e por ter propriedades fisiológicas bem conhecidas, (RADIC et al., 2011).

O crescimento populacional dessas plantas, relacionado a sua capacidade adsortiva seletiva, pode ser caracterizado a partir de modelos não lineares apropriados. A utilização de modelos não lineares é muito eficaz para a modelagem de crescimento populacional, uma vez que eles se valem de parâmetros que possuem interpretação biológica e, portanto, são passíveis de análises mais adequadas e precisas.

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho foi apresentar uma metodologia de ajuste e de seleção de modelos de crescimento populacional não lineares com base em indicadores estatísticos que servem como avaliadores de qualidade dos modelos. A determinação do melhor modelo de crescimento populacional para a *Lemna minor* pode servir de base para estudos que visem a sua aplicação no tratamento de águas residuárias bem como qualquer outro estudo correlato.

2 MATERIAL E MÉTODOS

A metodologia utilizada envolve 4 partes: (i) os materiais; (ii) os modelos não lineares de crescimento populacional; (iii) o ajuste dos modelos; (iv) os indicadores estatísticos da qualidade de ajuste.

2.1 Materiais

A fim de realizar o cultivo da macrófita, foi necessária a preparação das soluções estoque que constituem o meio Steinberg, que é o meio que gera o melhor crescimento de *Lemna minor*. As concentrações e metodologias de padronização foram devidamente normalizadas conforme proposto por Steinberg (1946). A proporção escolhida para elaboração do meio experimental foram 20/180, seguindo a relação M/A, em que M é a quantidade em mL de solução Steinberg e A é a quantidade, também em mL, de água deionizada.

O experimento foi realizado em triplicata a fim de se obter um valor médio do número de frondes ao longo do crescimento populacional.

Em cada um dos recipientes foram colocados o número inicial de cinco frondes, e o tempo de duração do experimento foi de 40 dias. Na tentativa de expor as macrófitas às condições luminosas mais próximas o possível do natural, não foi utilizada câmara de fotoperíodo, assim as plantas passaram por horas com incidência direta de luz solar, horas com incidência indireta de luz solar (efeito de nuvens ou reflexos) e horas de incidência de luz lunar. Cabe ressaltar que a *Lemna minor* realiza fotossíntese com qualquer intensidade luminosa.

A Fig. 1 apresenta o gráfico do crescimento do número médio de frondes de *Lemna minor*, em função do tempo.

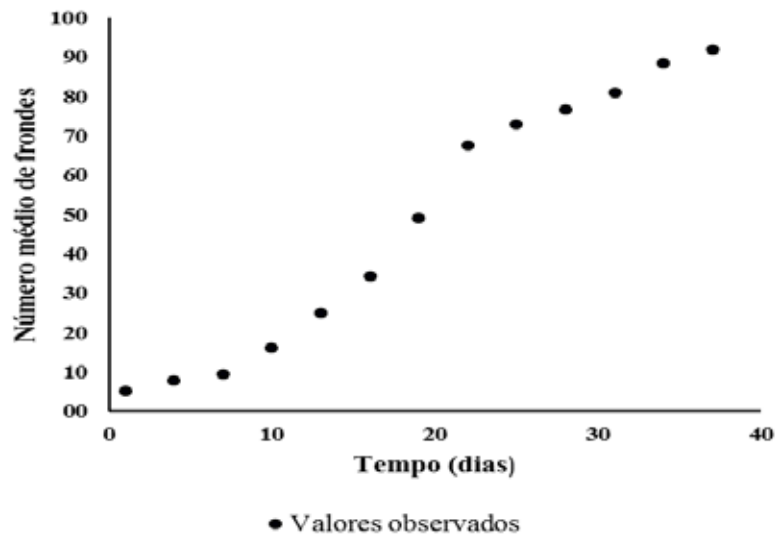


Figura 1: Crescimento do número médio de frondes de *Lemna minor* (em dias).

2.2 Modelos não lineares de crescimento populacional

Vários modelos não lineares são utilizados para descrever a dinâmica de crescimento populacional de plantas aquáticas como as macrófitas. Dentre

eles, os modelos mais utilizados são os modelos Logístico, de Gompertz e Morgan-Mercer-Flodin (MMF) (ARAÚJO et al., 2009; FREITAS e BARIONI JUNIOR, 2005; MENDES, 2011). Os modelos e suas equações estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Modelos não lineares de crescimento populacional e suas equações.

Modelo	Equações
Logístico	$A(1+Be^{-kt})^{-1}$ (1)
Gompertz	$A\exp(-Be^{-kt})$ (2)
Morgan-Mercer-Flodin (MMF)	$(Bk+At^d)/(k+t^d)$ (3)

Fonte: Liu et al. (2011).

O parâmetro A das Eq. (1), (2) e (3) é o valor assintótico, ou seja, valor para o qual o crescimento se estabiliza; B é uma constante de integração e não tem interpretação biológica; k é a taxa de crescimento (exceto no modelo MMF, no qual não possui significado biológico); o parâmetro d, que serve para flexibilizar o ajuste do modelo, está ligado com o ponto de inflexão do modelo.

2.3 Ajuste dos modelos

O ajuste dos parâmetros dos modelos foi realizado a partir do método de mínimos quadrados não linear generalizado (HOFFMAN e VIEIRA, 1998). Em particular, no software R (R Development Core Team, 2013), o método pode ser executado a partir da função `gnls`, contida no pacote `nlme`. Mais detalhes sobre a utilização da função `gnls` encontram-se no Anexo I.

2.4 Indicadores estatísticos da qualidade de ajuste

A seleção do modelo é realizada a partir de um esquema de pontuação dos modelos descrito a seguir:

Aplicando o teste t, com nível de significância (α) desejado, verifica-se a significância estatística

de cada modelo comparando o valor-p do teste t ao nível de significância. Se o valor-p do teste t é menor do que o nível de significância utilizado para todos os estimadores paramétricos de um modelo, então considera-se o modelo como estatisticamente significativo e representativo da dinâmica de crescimento populacional da planta. Caso algum estimador paramétrico não seja estatisticamente significativo, então o modelo é descartado, ou pontuado negativamente, caso o estimador paramétrico não significativo não tenha significado físico/biológico.

A fim de selecionar o modelo que melhor representa a dinâmica de crescimento populacional dentre os modelos estatisticamente significativos, foram utilizados também os seguintes testes e avaliadores de qualidade para avaliação da qualidade de ajuste dos modelos: teste de Durbin-Watson (DW) (DURBIN e WATSON, 1951) para auto correlação residual, coeficiente de determinação ajustado (R^2_a), critério de informação de Akaike (AIC) (AKAIKE, 1974), critério de informação Bayesiano (BIC) (SCHWARZ, 1978) e Desvio Padrão Residual (DPR). Canto e Schneider (2004) também utilizaram o coeficiente de determinação e o DPR para comparar os modelos e selecionar o modelo MMF como o melhor para descrever o crescimento da *Grevillea robusta*.

A geração dos indicadores estatísticos de avaliação de qualidade dos modelos também foi realizada com a utilização dos pacotes *nlme* e *car* do software R.

As curvas de crescimento são a base em que são aplicados os modelos não lineares, e elas são obtidas pela coleta de dados de crescimento, em uma determinada amostra, ao longo do tempo. Devido a isso, talvez a hipótese de independência dos erros que geralmente é assumida nos modelos básicos de regressão não seja apropriada, pois pode haver correlação entre o erro relativo a um período e o erro da observação anterior, portanto há que se verificar a existência de correlação entre os erros. O teste DW deve ser realizado para todos os modelos testados para verificação da existência de auto correlação nos resíduos. Nesse teste, a hipótese nula de que os resíduos não são autocorrelacionados é testada contra a hipótese de que os resíduos seguem um processo auto regressivo de primeira ordem, conforme DRAPER e SMIYH (1998). Quando um modelo apresentar valor-p menor que o nível de significância utilizado, então, o modelo é pontuado negativamente.

Com relação aos demais testes, pontua-se positivamente o modelo com: menores valores AIC,

BIC e DPR; maiores valores R^2_a . Também se pontuam positivamente os modelos com menores números de parâmetros.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, será aplicada a metodologia supracitada para a modelagem do crescimento da *Lemma minor*.

3.1 Ajuste dos modelos

Aplicando-se o método dos mínimos quadrados não linear generalizado, foram obtidos os estimadores paramétricos para os modelos Logístico, de Gromptz, e MMF. Aplicando o teste t, com nível de significância (α) de 5%, verificou-se que o valor-p do teste t é menor que o nível de significância para todos os estimadores paramétricos de todos os modelos, exceto para o parâmetro k do modelo MMF. Os valores dos parâmetros dos modelos e seus respectivos erros padrões são apresentados nas Tabelas 2 a 4.

A Tabela 2 apresenta as estimativas dos parâmetros, erros padrões e valores-p para o teste t do modelo ajustado de Gompertz.

Tabela 2: Estimativas dos parâmetros, erros padrões e teste t referentes ao modelo de Gompertz ajustado.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Valor-p (teste t)
A	102,32079	5,73901	0,0000
B	5,23399	0,78195	0,0000
K	0,10528	0,01243	0,0000

Os dados da Tabela 2 mostram que todos os parâmetros do modelo foram significativos, de acordo com o valor-p encontrado para cada um deles. Pela estimativa do parâmetro A, nota-se que o número médio de frondes foi superestimado nesse modelo, uma vez que o valor observado foi

92 aproximadamente. Araújo et al. (2009) e Freitas e Barioni Junior (2005) também encontraram, em seus estudos sobre búfalas da raça Murrah e bovinos Canchim, respectivamente, parâmetros assintóticos superestimados com esse modelo.

O valor de k indica a taxa de crescimento da espécie. Valores maiores do que k indicam velocidade de crescimento mais rápida, ou seja, que a planta vai atingir a sua assíntota de crescimento de maneira mais rápida do que aquelas espécies que possuem valor menor para esse parâmetro.

Mendes (2011) relatou valor de k semelhante ao analisar o crescimento de tomates.

A Tabela 3 apresenta as estimativas dos parâmetros, erros padrões e valores- p para o teste t do modelo Logístico ajustado.

Tabela 3: Estimativas dos parâmetros, erros padrões e teste t referentes ao modelo Logístico ajustado.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Valor- p (teste t)
A	91,87129	2,37069	0,0000
B	31,17971	6,35608	0,0006
K	0,19003	0,01341	0,0000

Nota-se, na Tabela 3, que todos os parâmetros foram considerados significativos pelo teste t e que o parâmetro A possui uma estimativa condizente com a realidade da espécie, que é cerca de 92. Araújo et al. (2009) e Oliveira, Lôbo e Pereira (2000) relataram a subestimação desse parâmetro com o modelo Logístico em seus estudos.

Observa-se ainda, na Tabela 3, que a taxa de crescimento, k do modelo Logístico, é praticamente o dobro da taxa de crescimento do mode-

lo de Gompertz. Isso indica que o modelo Logístico atinge mais rapidamente a sua estabilidade, comparando-se ao modelo de Gompertz. Isso pode ser comprovado pelo próprio valor estimado do parâmetro A, quando comparado ao mesmo parâmetro do modelo de Gompertz, que possui menor k e, por isso, atinge a assíntota em um momento posterior.

A Tabela 4 apresenta as estimativas dos parâmetros, erros padrões e valores- p para o teste t do modelo ajustado de MMF.

Tabela 4: Estimativas dos parâmetros, erros padrões e teste t referentes ao modelo MMF ajustado.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Valor- p (teste t)
A	98,8600	4,7000	0,0000
B	6,7100	1,6700	0,0031
K	39296,0200	44530,6500	0,4005
D	3,5600	0,4100	0,0000

Nota-se, na Tabela 4, que todos os parâmetros foram considerados significativos pelo teste t , a menos do parâmetro k . O parâmetro A também foi superestimado nesse modelo, porém não tanto quanto no modelo de Gompertz. Mas, mesmo superestimando o parâmetro A, os valores estimados pelo modelo resultam em valores compatíveis com os dados tomados no experimento.

O modelo MMF possui o parâmetro d que serve para flexibilizar o ajuste do modelo e está ligado com o ponto de inflexão do modelo. Assim como nos outros modelos, esse ponto é observado nas proximidades do vigésimo primeiro dia de cultivo.

A Fig. 2 apresenta o ajuste das curvas de crescimento dos três modelos estudados. O modelo

de Gompertz não possui parâmetro que indica o ponto de inflexão da curva, mas analisando a Fig. 2, percebe-se visualmente que a curva muda sua inclinação por volta do vigésimo primeiro dia de cultivo, o que indica que, a partir daí, a taxa de crescimento diminui. Assim como o modelo de Gompertz, o modelo Logístico não possui parâ-

metro referente ao ponto de inflexão, o que não impede sua avaliação visual. A curva sugere um ponto de inflexão em torno do vigésimo primeiro dia de cultivo. Apesar de também não possuir parâmetro que leva em conta o número inicial de frondes, o modelo Logístico não subestimou esse valor, diferentemente do modelo de Gompertz.

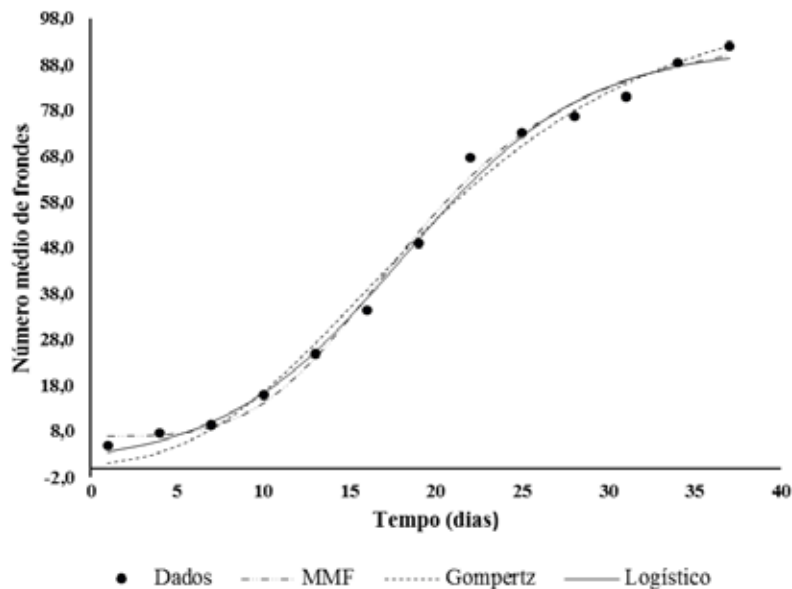


Figura 2: Comparação gráfica dos modelos.

Ainda que o parâmetro A tenha sido superestimado para o modelo Gompertz, a função gera boa estimativa para o valor assintótico, ou seja, isoladamente, o parâmetro A está superestimado, mas em conjunto com os outros parâmetros da função o valor assintótico gerado pelo modelo aproxima-se do observado na prática.

Nota-se, ainda na Fig. 2, que o modelo Logístico apresenta um comportamento semelhante ao experimental em toda a sua extensão, e não há subestimação ou superestimação excessiva do número médio de frondes. Oliveira, Lôbo e Pereira (2000), por exemplo, relataram valores

superestimados no início da curva ajustada pelo modelo Logístico para o crescimento de fêmeas da raça Guzerá.

A curva gerada pelo modelo MMF pode ser observada também na Fig. 2, e percebe-se que ela não superestima nem subestima bruscamente os valores iniciais da função e tampouco possui assíntota muito distante do dado observado ao fim do experimento. Outro ponto que pode ser observado é o número médio de frondes dos primeiros dias, que é mais bem estimado por este modelo do que pelo modelo de Gompertz.

3.2 Seleção do melhor modelo

Qualitativamente, os modelos são praticamente equivalentes, então será necessário analisar os avaliadores estatísticos para selecionar o modelo que melhor representa a dinâmica de crescimento populacional experimental. Observe, contudo, que o modelo MMF teve o estimador do parâme-

tro k considerado estatisticamente não significativo, o que permitiria descartar o modelo MMF.

A Tabela 5 apresenta o resultado dos indicadores Durbin-Watson (DW), Critério de Informação Bayesiano (BIC), Critério de Informação de Akaike (AIC), Coeficiente de Determinação Ajustado (R^2_a), e Desvio Padrão Residual (DPR) para cada um dos modelos.

Tabela 5: Avaliadores e testes de qualidade para os modelos ajustados.

Modelo	N. de parâmetros	Valor-p (DW)	BIC	AIC	R^2_a	DPR
Logístico	3	0,402	69,598	67,338	0,993	2,703
Gompertz	3	0,080	76,467	74,207	0,989	3,521
MMF	4	0,728	70,147	67,322	0,993	2,637

Em que: N = número de parâmetros.

Quanto ao número de parâmetros dos modelos, ressalta-se que o modelo de Gompertz e Logístico possui um parâmetro a menos que o modelo MMF, ou seja, mais simples de convergir a um resultado e, ainda assim, possui dois parâmetros passíveis de interpretação biológica, enquanto o modelo MMF possui apenas um.

Quanto ao valor de R^2_a , eles são praticamente iguais para os modelos, indicando que cerca de 99% dos dados são explicados pela função ajustada.

De acordo com os resultados do AIC, o modelo MMF é apontado como o mais adequado, seguido do Logístico, que tem praticamente o mesmo valor AIC. Quando se analisa o valor de BIC, percebe-se que o modelo Logístico é mais adequado. O DPR, que indica a variabilidade dos dados, sugere novamente o modelo MMF como o melhor

para o caso, uma vez que quanto menor o valor do desvio padrão residual, melhor o modelo.

Os gráficos de resíduos são usados para que a aleatoriedade dos resíduos de cada modelo seja percebida visualmente. Quanto mais dispersos e aleatórios os pontos, melhor; e quanto mais tendenciosos e organizados, pior. A Fig. 3 apresenta os gráficos de resíduos dos modelos ajustados. Os resíduos do modelo de Gompertz não estão completamente aleatorizados e possuem uma tendência que pode ser facilmente observada; todavia, essa tendência não foi suficientemente forte para que o teste de DW detectasse autocorrelação residual no modelo. No que se refere aos resíduos do modelo Logístico e MMF, diferentemente do modelo acima descrito, há maior aleatoriedade dos resíduos, o que também foi detectado pelo teste de DW, que acusou inexistência de erros autocorrelacionados.

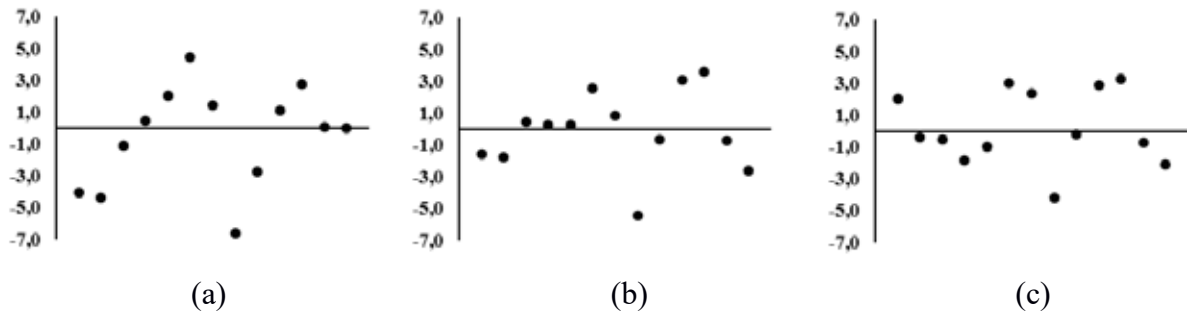


Figura 3: Gráficos dos resíduos de cada modelo (a) Gompertz (b) Logístico (c) MMF.

Na análise geral dos gráficos de resíduos, percebe-se que o resíduo da oitava observação se apresentou discrepante dos demais, para os três modelos. Ressalta-se que a oitava observação é aquela situada logo após o ponto de inflexão das curvas de todos os modelos. Em se tratando de organismos vivos distintos, em que cada fronde é um indivíduo e tem as suas características de crescimento independentes, ou seja, cada uma pode atingir a sua taxa máxima de crescimento em um momento distinto, o ponto de inflexão de uma fronde pode não coincidir com o das de-

mais, o que gera o resíduo maior nesse momento do experimento.

A Tabela 6 mostra a tabela de pontuação dos modelos segundo a análise apresentada. O modelo Logístico se confirma como o melhor modelo para o crescimento de *Lemna minor*, o que está de acordo com o exposto por Puiatti et al. (2013), que trazem o modelo Logístico como um dos mais utilizados para descrever o crescimento de plantas.

Tabela 6: Pontuação dos Modelos.

Modelo	N. de parâmetros	Parâmetros não significativos	Valor-p (DW)	BIC	AIC	R_a^2	DPR	Total
Logístico	1	0	0	1	1	1	0	4
Gompertz	1	0	0	0	0	1	0	2
MMF	0	-1	0	0	1	1	1	2

Em que: N = número de parâmetros.

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia de ajuste e de seleção de modelos de crescimento populacional não lineares com base em indicadores estatísticos que servem como avaliadores de qualidade dos modelos. Para ilustrar o uso da metodologia, foi feito o cultivo de *Lemna minor* em meio Steinberg e foram ajustados três

modelos não lineares aos dados médios de crescimento populacional de suas frondes.

O cultivo de *Lemna minor* em diferentes concentrações mostrou-se ineficiente em baixa concentração, devido à falta de nutrientes, e eficiente em concentrações maiores. O ajuste dos modelos ao crescimento de *Lemna minor* e

a avaliação dos parâmetros de cada um deles indicam que o modelo Logístico é o que melhor representa a dinâmica de crescimento populacional da macrófita.

Áreas como bioindicação, ecotoxicologia e de tratamento de águas residuárias podem se beneficiar desse resultado, uma vez que, estabelecido o melhor modelo de crescimento para a espécie, pode-se então estabelecer parâmetros que permitam realizar o controle da qualidade da água e assim propor medidas corretivas ou preventivas para que a qualidade da água seja mantida em boas condições.

5 REFERÊNCIAS

- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 19, n. 6, p. 716-723, 1974.
- ARAÚJO, R. O. de. et al. Ajuste de modelos não-lineares aos dados de crescimento de búfalas da raça Murrah criadas em terras baixas no estado do Rio Grande do Sul. In: 19 CONGRESSO BRASILEIRO DE ZOOTECNIA. **Anais...** Águas de Lindóia: Sociedade Brasileira de Zootecnia, 2009.
- ARROYAVE, M. P. La lenteja de agua (*Lemna minor* L.): una planta acuática promisoría. **Revista EIA**, v. 1, n. 1, p. 33-38, 2004.
- CANTO, J. L. do; SCHNEIDER, P. R. Crescimento da *Grevillea robusta* A. Cunn. Na depressão central do Rio Grande do Sul, Brasil. **Revista Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 14, n. 2, p. 29-35, 2004.
- DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. 3 ed. New York. Ed. John Wiley, 659 p. 1998.
- DURBIN, J.; WATSON, G. S. Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. **Biometrika**, v. 38, n.1-2, p. 159-179, 1951.
- FISKESJÖ, G. The Allium test as a standart in environmental monitoring. **Hereditas**, v. 102, n. 1, p.99-112, 1985.
- FREITAS, A. R.; BARIONI JUNIOR, W. Aplicação de curvas de crescimento em bovinos de corte. In: 50 REUNIÃO ANUAL DA REGIÃO BRASILEIRA DA SOCIEDADE INTERNACIONAL DE BIOMETRIA. **Anais...** Londrina. 2005.
- HOFFMAN, R.; VIEIRA, S. **Análise de regressão: uma introdução à econometria**. 3 ed. São Paulo. Ed. Hucitec. 379 p. 1998
- JAIN, S. K. et al. Heavy metal uptake by *Pleurotus sajor-caju* from metal enriched duckweed substrate. **Biol.Wastes**, v. 24, n. 4, p. 275-282. 1988.
- KHELLAF, N.; ZERDAOUI, M. Growth response of the duckweed *Lemna minor* to heavy metal pollution. **Iran Journal of Environment, Health, Science and Engineering**, v. 6, n. 3, p. 161-166, 2009.
- LIU, Z. et al. Modelling growth of five different colour types of mink. **South African Journal of Animal Science**, v. 41, n. 2, p. 116-125, 2011.
- MENDES, P. N. **Ajuste dos modelos Gompertz e Logístico na descrição das curvas de crescimento de tomates: uma abordagem Bayesiana**. 2011. 82p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária). Departamento de Estatística, Universidade Federal de Lavras, Lavras. 2011.
- OLIVEIRA, H. N.; LÔBO, R. B.; PEREIRA, C. S. Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da raça Guzerá. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 35, n. 9, p.1843-1851, 2000.
- OZENGİN, N.; ELMACI, A. Performance of Duckweed (*Lemna minor* L.) on different types of wastewater treatment. **Journal of Environmental Biology**, v. 28, p. 307-314, 2007.
- PUIATTI, G. A. et al. Análise de agrupamento em seleção de modelos de regressão não lineares para descrever o acúmulo de matéria seca em plantas de alho. **Revista Brasileira de Biometria**, Lavras, v. 31, n. 3, p.337-351, 2013.
- R DEVELOPMENT CORE TEAM. R: **A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2013. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.
- RADIC, S. et al. Duckweed *Lemna minor* as a tool for testing toxicity and genotoxicity of surface waters. **Ecotoxicology and Environmental Safety**, v.74, p.182-187, 2011.
- SCHWARZ, G. Estimating the dimensional of a model. **Annals of Statistics**, v. 6, n. 2, p.461-464, 1978.
- SOUZA, D. A. **Bacia do Riberão e Represa do Lobo: Bases Ecológicas para o Planejamento Regional, Manejo e Conservação**. 1993. 158p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil). Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos. 1993.
- STEINBERG, R. A. Mineral requirements of *Lemna minor*. **Plant Physiol**. v. 21, n. 1, p. 42-48, 1946.
- WETZEL, R. G. **Limnologia**. Fundação Calouste Gulbenkian. 1011 p. 1993.

ANEXO I

A seguir, será apresentada, de maneira sucinta, a forma de realizar o ajuste paramétrico e os testes estatísticos utilizando o software R, lembrando que é necessário carregar os pacotes *nlme* e *car*.

O método de mínimos quadrados generalizado pode ser realizado utilizando a função *gnls* conforme exemplo das Eq. (1-2).

```
modelo<-frondes~(B*k+A*dias^d)/(k+dias^d) (1)
```

```
mmf<=-gnls(modelo,dados,start=c(A90=,B10=,k-40,d=1)) (2)
```

A Eq. (1) ilustra como montar o modelo MMF, em que: *frondes* e *dias* são dados experimentais; A, k, d, B são parâmetros do modelo.

A Eq. (2) ilustra como utilizar o comando *gnls*, em que: *modelo* refere-se ao modelo definido na Eq. (1); *dados* é a variável matricial que

armazena todos os dados experimentais (*dias*, *frondes*) que já devem ter sido carregados; *start=c(A=90,B=10,k=40,d=1)* define condição inicial para estimação dos parâmetros. A função *gnls* também retorna o valor para o DPR.

O teste DW pode ser realizado utilizando as Eq. (3-5).

```
r0<-residuals(modelo) (3)
```

A função *residuals* das Eq. (3) retorna os resíduos do modelo.

A função *durbinWatsonTest* retorna o valor do teste DW a partir de um vetor residual de um modelo linearizado (*m0*) para um lag máximo, conforme ilustra a Eq. (5). A eq. (4) ilustra como obter o vetor residual de um modelo linearizado (*m0*).

```
m0 <- lm(r0~1) (4)
```

```
durbinWatsonTest(m0,max.lag=3) (5)
```