A Resolução Geral da Equação Logística

J. C. DIAS DE MORAES

Engenheiro Químico e Sanitarista
Departamento de Águas e Esgotos de São Paulo

1 — CONSIDERAÇÕES GERAIS

1.1 — *Preliminares*: a resolução da equação logística exige sempre o conhecimento de três populações, assim como do seu afastamento no tempo, pois são três as constantes que aparecem na mesma.

Yule estabeleceu uma condição que simplificou bastante tal resolução, a qual chamamos de "condição de Yule". Tal condição, contudo, limitou, ou melhor, condicionou a aplicação da equação logística para um determinado caso particular de dados conhecidos. Esta condição estabelece que as três populações conhecidas devem ser equidistantes no tempo. A partir desta condição, Yule, e outros autores, estabeleceram diferentes métodos para a resolução desta equação. Ora, a civilização não avançou igualmente em todos os países, de modo que a metodologia estatística ainda hoje é sujeita a discussão em não poucas nações. Assim, não se pode esperar que, tenha havido, generalizadamente, censos populacionais em datas equidistantes no tempo na maioria dos países. O nosso país é um exemplo típico do que dissemos.

Admitindo-se que, a processologia dos censos populacionais executados pelo I. B. G. E. em nosso país tenha sido adequada e precisa, ainda nos resta uma terceira população equidistante no tempo, a qual seria a de 1930, pois só possuimos dados de 1940 e 1950. Ora, diante disto, não se torna possível, de um modo geral, aplicar a logística para as nossas populações, dentro da condição de Yule. Daí a nossa preocupação em estabelecer um método prático, que pudesse dispensar a condição de Yule.

Em trabalho anterior (ref. 1) nos introduzimos o conceito da função normal logística, a partir da qual também estabelecemos um processo simples para a aplicação da equação logística. Êste nosso processo, contudo, não dispensa a condição de Yule. Mas, apesar das suas vantagens, tal processo não pode interessar a alguém que disponha de três populações não equidistantes no tempo. Esta é a única razão de apresentação dêste nosso novo trabalho, o qual mostra que não é difícil a resolução geral da equação logística, assim como a sua aplicação à estimativa de populações nos problemas de engenharia.

1.2 — *Caso Específico do Estado de São Paulo*: foi feito um recenseamento no Estado de São Paulo no ano de 1934, o qual merece bastante fé. Existem mais dois censos, nacionais, feitos em 1940 e 1950. Assim, dispõe-se no nosso Estado, de três populações bem determinadas, em tôdas, ou quase tôdas as nossas cidades que, naquêle primeiro censo eram sede de município. Mas estas três populações não são equidistantes no tempo, ficando, pois, prejudicada a condição de Yule para o nosso Estado. Estamos, portanto, no caso de não podermos utilizar ainda êste grande contigente de dados estatísticos, para a estimativa das populações das nossas cidades, pela logística.

Com o nosso atual trabalho estes dados poderão ser aproveitados daqui para a frente.

Tem sido adotado o número de casas das cidades, em diferentes datas equidistantes no tempo, em substituição às populações. E' uma estimativa como qualquer outra, não se levando em consideração o mérito do processo, mas que inclui mais uma possibilidade de êrro, pois o valor da população por casa não se mantém constante no decorrer dos anos.

1.3 — *Método Seguido*: seguimos o mesmo método adotado no nosso primeiro trabalho sôbre a logística (ref. 1). A modificação consiste em não considerar a condição de Yule. Êste fato fornece uma equação de P_s de resolução mais difícil.

O nosso trabalho consiste em mostrar o caminho mais fácil para a sua resolução, o que não impede que outros achem melhores caminhos para resolvê-la. Para tanto, adotamos o método de Newton, dado em qualquer compêndio de matemática superior, e que nos pareceu o melhor neste caso.

As idéias fundamentais creadas no nosso primeiro trabalho é que permitiram a obtenção de uma equação geral de P_s, perfeitamente resolúvel, tal como apresentamos adiante.

No final dêste trabalho damos um exemplo para servir de roteiro de cálculo.

2 — TEORIA DO MÉTODO GERAL DE RESOLUÇÃO

2.1 — *Determinação de "b"*: neste trabalho, como os que se seguirem a êle, adotaremos a mesma simbologia usada nos dois anteriores, para manter a uniformidade na consulta e no uso das equações. Voltando ao nosso trabalho anterior (ref. 2) temos que:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= -\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{P_s}{P_0}-1\right)\\ \varphi_1 &= -\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{P_s}{P_1}-1\right)\\ \varphi_2 &= -\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{P_s}{P_2}-1\right)\end{aligned} \tag{1}$$

em que, neste caso, P_0, P_1 e P_2 não são equidistantes no tempo.

Considerando que (ref. 3):

$$\varphi_n = \frac{b\,\Delta t_n}{2} + \varphi_{n-1} \tag{2}$$

e aplicando para os pontos P_0 e P_1 vem:

$$\varphi_1 = \frac{b\,\Delta t_1}{2} + \varphi_0 \tag{3}$$

$$\boxed{b = \frac{2(\varphi_1 - \varphi_0)}{\Delta t_1}} \tag{4}$$

Substituindo φ_0 e φ_1 de (1) vem finalmente:

$$\boxed{b = \frac{1}{\Delta t_1}\log_e\frac{\dfrac{P_s}{P_0}-1}{\dfrac{P_s}{P_1}-1}} \tag{5}$$

em que:

$$\Delta t_n = t_n - t_{n-1} \tag{6}$$

e então:

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 \tag{6a}$$

2.2 — *Determinação de "a"*: tomando a equação (ref. 4):

$$a = -2\varphi + b\,t \tag{7}$$

e aplicando para P_0 teremos imediatamente:

$$a = -2\varphi_0 + b\,t_0 \tag{8}$$

Considerando que t_0 é a origem dos tempos:

$$t_0 = 0 \tag{9}$$

e então:

$$\boxed{a = -2\varphi_0} \tag{10}$$

ou seja:

$$\boxed{a = \log_e\left(\frac{P_s}{P_0} - 1\right)} \tag{11}$$

2.3 — *Determinação de "P_s"*: tomando a equação (ref. 5):

$$\varphi_n = \frac{b}{2}\left(\Delta t_{n-1} + \Delta t_n\right) + \varphi_{n-2} \tag{12}$$

e aplicando para P_0, P_1 e P_2:

$$\varphi_2 = \frac{b}{2}\left(\Delta t_1 + \Delta t_2\right) + \varphi_0 \tag{13}$$

Substituindo φ_0, φ_2 e "b" vem:

$$-\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{P_s}{P_2} - 1\right) = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2\,\Delta t_1}\log_e\frac{\frac{P_s}{P_0} - 1}{\frac{P_s}{P_1} - 1} - \\ -\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{P_s}{P_0} - 1\right) \tag{14}$$

Ou seja:

$$\log_e\left(\frac{P_s}{P_2} - 1\right) = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{\Delta t_1}\cdot\log_e\left(\frac{P_s}{P_1} - 1\right) - \\ -\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}\log_e\left(\frac{P_s}{P_0} - 1\right) \tag{15}$$

Passando a forma não logarítmica vem:

$$\boxed{\frac{P_s}{P_2} - 1 = \frac{\left(\frac{P_s}{P_1} - 1\right)^{\frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{\Delta t_1}}}{\left(\frac{P_s}{P_0} - 1\right)^{\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}}}} \tag{16}$$

Fazendo:

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = k \tag{17}$$

vem:

$$\frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{\Delta t_1} = 1 + k \tag{18}$$

e, finalmente:

$$\boxed{\frac{P_s}{P_2} - 1 = \frac{\left(\dfrac{P_s}{P_1} - 1\right)^{1+k}}{\left(\dfrac{P_s}{P_0} - 1\right)^{k}}} \tag{19}$$

Esta é a equação que apresenta alguma dificuldade para ser resolvida, pois os expoentes podem não ser inteiros, ou ainda mesmo que o sejam, podem oferecer uma equação de difícil resolução.

2.4 — *Aplicação à Condição de Yule*: as equações obtidas simplificam-se consideràvelmente quando se considera a equidistância no tempo para as populações, ou seja a condição de Yule. Assim, para:

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \ldots\ldots = \Delta t_n = 1 \tag{20}$$

teremos em (4), (5) e (19):

$$b = 2\,(\varphi_1 - \varphi_0) \tag{21}$$

$$b = \log_e \frac{\dfrac{P_s}{P_0} - 1}{\dfrac{P_s}{P_1} - 1} \tag{22}$$

$$\frac{P_s}{P_2} - 1 = \frac{\left(\dfrac{P_s}{P_1} - 1\right)^2}{\dfrac{P_s}{P_0} - 1} \tag{23}$$

que são as equações já apresentadas por nós em trabalhos anteriores, obtidas sempre a partir da condição de Yule. Estas equações são simples, e certamente Yule notou as vantagens da sua condição, como nós estamos mostrando ou repetindo. Mas, a sua aplicação prática, que é o que interessa aos engenheiros, fica limitada a obtenção de dados que satisfaçam a esta condição, como já vimos.

Releva notar que a equação do valor de "a":

$$a = -2\,\varphi_0$$

é sempre a mesma, não dependendo a sua forma da condição de Yule.

2.5 — *Resolução da Equação de P_s*: tentamos vários artifícios para melhorar a forma da equação (19). Parece-nos, porém, que ela é mais fàcilmente resolúvel pelos métodos ditos não exatos, tais como o das diferenças, o das substituições sucessivas e o de Newton. Entre êstes, pareceu-nos o de melhor aplicabilidade neste caso o de Newton.

Êste método é simples, como passamos a descrever. Tendo-se uma equação:

$$f\,(P_s) = 0 \tag{24}$$

e sendo P'_s um valor aproximado da raiz, existe sempre uma grandeza "h" que somada a P'_s dará o valor exato da raiz:

$$P_s = P'_s + h \tag{25}$$

de tal modo que:

$$f(P'_s + h) = 0 \tag{26}$$

A relação:

$$\frac{f(P'_s + h) - f(P'_s)}{h}$$

pouco difere da derivada:

$$\left[\frac{d\,f(P_s)}{d\,P_s}\right]_{P_s = P'_s} \tag{27}$$

sí "h" fôr suficientemente pequeno, podendo-se pois fazer:

$$\frac{f(P'_s + h) - f(P'_s)}{h} = \left[\frac{d\,f(P_s)}{d\,P_s}\right]_{P_s = P'_s} + \varepsilon \tag{28}$$

sendo "ε" um infinitamente pequeno. Considerando as (26) e (28) virá imediatamente:

$$h = \frac{-f(P'_s)}{\left[\frac{d\,f(P_s)}{d\,P_s}\right]_{P_s = P'_s} + \varepsilon} \tag{29}$$

e "h" terá um valor aproximado dado por:

$$h \cong \frac{-f(P'_s)}{\left[\frac{d\,f(P_s)}{d\,P_s}\right]_{P_s = P'_s}} \tag{30}$$

Voltando a (15), e considerando as (17) e (18) teremos:

$$f(P_s) = \log_e\left(\frac{P_s}{P_2} - 1\right) - (1+k)\log_e\left(\frac{P_s}{P_1} - 1\right) + k\log_e\left(\frac{P_s}{P_0} - 1\right) \tag{31}$$

Cuja derivada será:

$$\frac{d\,f(P_s)}{d\,P_s} = \frac{\frac{1}{P_2}}{\frac{P_s}{P_2} - 1} - (1+k)\frac{\frac{1}{P_1}}{\frac{P_s}{P_1} - 1} + k\frac{\frac{1}{P_0}}{\frac{P_s}{P_0} - 1} \tag{32}$$

Fazendo $P_s = P'_s$ em (31) e (32) e substituindo em (30) virá:

$$h = \frac{-\log_e\left(\frac{P'_s}{P_2} - 1\right) + (1+k)\log_e\left(\frac{P'_s}{P_1} - 1\right) - k\log_e\left(\frac{P'_s}{P_0} - 1\right)}{\frac{\frac{1}{P_2}}{\frac{P'_s}{P_2} - 1} - (1+k)\frac{\frac{1}{P_1}}{\frac{P'_s}{P_1} - 1} + k\frac{\frac{1}{P_0}}{\frac{P'_s}{P_0} - 1}} \tag{33}$$

$$h = \frac{-\log_e\left(\frac{P'_s - P_2}{P_2}\right) + (1+k)\log_e\left(\frac{P'_s - P_1}{P_1}\right) - k\log_e\left(\frac{P'_s - P_0}{P_0}\right)}{\frac{1}{P'_s - P_2} - (1+k)\frac{1}{P'_s - P_1} + k\frac{1}{P'_s - P_0}} \tag{34}$$

Chamando-se:

$$\begin{cases} P'_s - P_2 = p'_2 \\ P'_s - P_1 = p'_1 \\ P'_s - P_0 = p'_0 \end{cases} \quad (35)$$

Virá em (34):

$$h = \frac{-\log_e \dfrac{p'_2}{P_2} + (1+k)\log_e \dfrac{p'_1}{P_1} - k\log_e \dfrac{p'_0}{P_0}}{\dfrac{1}{p'_2} - \dfrac{1+k}{p'_1} + \dfrac{k}{p'_0}} \quad (36)$$

Apesar de ser grande, esta equação é simples, não exigindo mais do que uma série de cálculos aritméticos para a sua resolução. Construímos uma fôlha de cálculo especial para a sua resolução, e que consta do final do nosso trabalho.

Desenvolvendo o númerador e passando para o sistema decimal teremos:

$$A_e = 2{,}3026\,[\log_{10} P_2 - (1 + k)\log_{10} P_1 + k\log_{10} P_0] + \\ + 2{,}3026\,[-\log_{10} p'_2 + (1 + k)\log_{10} p'_1 - k\log_{10} P'_0] \quad (37)$$

Chamando de:

$$k_{10} = \log_{10} P_2 - (1 + k)\log_{10} P_1 + k\log_{10} P_0 \quad (38)$$

Virá finalmente:

$$A_e = 2{,}3026\,k_{10} - 2{,}3026\,[\log_{10} p'_2 - (1 + k)\log_{10} p'_1 + k\log_{10} p'_0] \quad (39)$$

Que substituído em (36) fornece:

$$h = \frac{2{,}3026\,k_{10} - 2{,}3026\,[\log_{10} p'_2 - (1+k)\log_{10} p'_1 + k\log_{10} p'_0]}{\dfrac{1}{p'_2} - \dfrac{1+k}{p'_1} + \dfrac{k}{p'_0}} \quad (40)$$

Determinado o valor de "h", a primeira raiz aproximada será dada por:

$$P_s = P'_s + h \quad (41)$$

Entretanto, convém esclarecer que êste valor de "h" também é, geralmente, aproximado, pois "ε" é um infinitamente pequeno.

Atribuindo-se um valor para $P_s = P'_{s1}$ calcula-se o primeiro valor de "h_1". Si êste primeiro valor de "h" fôr muito grande em valor absoluto, isto quer dizer que o primeiro valor admitido para P'_s, ou seja P'_{s1}, afasta-se muito do verdadeiro valor de P_s, e então deveremos fazer nova aproximação. Esta aproximação é feita assim:

$$P'_{s2} = P'_{s1} + h_1 \quad (42)$$

Com poucas tentativas chega-se ràpidamente a um valor satisfatório para P_s. A solução torna-se satisfatória para P_s quando fôr encontrado um valor próximo de zero para "h". Com $h = 0$ tem-se a raiz exata da equação (19). Na verdade, não há interêsse em se obter a raiz exata, pois ela pode ser fracionária ou mesmo irracional, e a população nunca pode, materialmente, deixar de ser um número positivo, inteiro e real.

2.6 — *Variação de "h"*: o primeiro valor de "h" pode ser positivo ou negativo.

No caso de ser positivo é evidente que o valor assumido para P'_s era menor do que o valor exato de P_s. Por outro lado, o valor de "h" irá diminuindo, em valor absoluto, até se anular. Assim temos:

$$h > 0 \quad (43)$$

e virá:

$$P'_s < P_s \tag{44}$$

e

$$\lim_{h \to 0} P'_s = P_s \tag{50}$$

No caso de "h" ser negativo o valor assumido para P'_s será maior do que a raiz exata P_s, e o processo é contrário ao caso anterior. Nesse caso temos:

$$h < 0 \tag{51}$$

e virá:

$$P'_s > P_s \tag{52}$$

e então:

$$\lim_{h \to 0} P'_s = P_s \tag{53}$$

Isto quer dizer que se pode atingir P_s tanto pelo seu *limite superior* como pelo seu limite inferior.

Em conclusão, pelo primeiro valor de "h" já se pode saber: a) de que lado o primeiro valor de P'_s está; b) sí o valor assumido para P'_s está muito afastado ou não da raiz exata.

2.7 — *Primeiro Valor de P'_s*: existe uma certa dificuldade para se selecionar o primeiro valor de P'_s, pois êle pode estar muito afastado da raiz exata. Neste caso, será necessário se fazer bastantes substituições.

Entretanto, alguma coisa se pode saber para que não se escolha um valor completamente absurdo para P'_{s1}.

Em primeiro lugar, a raiz exata é sempre maior do que P_2, ou seja:

$$P_s > P_2 \tag{49}$$

o que já nos dá o limite inferior de P'_s.

Por outro lado, sí algum dos valores de P_0, P_1 ou P_2 estiver próximo do ponto de inflexão (antes ou depois), o valor exato da raiz será aproximadamente o dôbro daquêle que estiver em tôrno de P_i. Mas, é difícil se estabelecer "a priori", quando algum dêstes pontos está em tôrno do ponto de inflexão, para o caso em que êles não sejam equidistantes no tempo. Contudo, o rápido crescimento da população, que pode ser avaliado entre os valores de P_1 e P_2 sôbre P_0, sob a forma de porcentagem, pode dar uma idéia razoável da posição do ponto de inflexão. Sôbre êste assunto faremos um trabalho em separado, a ser publicado em ocasião oportuna.

Um critério que, as vêzes é bom para as nossas cidades do interior, consiste em se admitir que:

$$P'_s = 4\,P_2 \tag{50}$$

quando o critério anterior não pode ser admitido.

Sí, neste caso, após a primeira determinação de "h", fôr verificado que há um grande afastamento entre P'_s e a raiz exata, isto é, si "h" fôr muito grande em valor absoluto relativamente ao primeiro valor de P'_s, deve-se aumentar ou diminuir o valor de P'_s de acôrdo com o próprio valor de "h" achado, tal como é dado em (42).

Muitas vêzes a comparação com outras cidades semelhantes, aliada ao chamado "*bom senso*", e aos critérios anteriores, pode dar uma idéia da população de saturação da cidade em estudo.

2.8 — *Condição de Passagem*: neste caso, em que as três populações conhecidas não são equidistantes no tempo, o conhecimento de alguma condição de passagem seria valiosíssimo, pois evitaria um estafante trabalho de cálculo, até se saber sí existe ou não uma logística passando por aquelas três populações. Mas, acontece que neste caso, a determinação da condição de passagem nos parece extremamente difícil, e na verdade não a conhecemos.

2.9 — *Precisão do Cálculo*: foi tentada a resolução da equação (15), (16) ou (19) por meio de gráficos combinados, em papel log-log. Entretanto, pelo fato dela se apresentar sob forma exponencial ou logarítmica, êste processo conduz a resultados muito próximos nos dois membros, cujos anti-logarítmos se afastam consideràvelmente dos valores exatos. Dêste modo não há sinão que recorrer ao cálculo aritmético, e feito com bastante precisão. Deve-se usar a tabela de logarítmos, com pelo menos seis casas decimais. Isto reduz bastante o êrro devido às operações aritméticas.

Para metodizar o processo de cálculo construímos uma fôlha de cálculo, cujo modêlo em tamanho original poderá ser obtido, gratuitamente, em qualquer ocasião, do Autor dêste trabalho.

No exemplo dado será descrito o processo e emprego da fôlha de cálculo.

3 — PROCESSO DE CÁLCULO

3.1 — *Exemplo de Cálculo*: vamos usar para exemplo de cálculo a cidade de Limeira, a qual já nos serviu em nosso primeiro trabalho sôbre a logística. Não discutimos ainda, nem neste e nem nos anteriores trabalhos, sôbre o mérito da aplicação da equação logística aos crescimentos humanos ou não. Isto será feito mais tarde. Em cada caso particular cabe ao interessado dar as devidas interpretações. Limitamo-nos sòmente ao seu desenvolvimento matemático.

Foi feito em 1934 um censo da população do Estado de São Paulo, pelo Departamento Estadual de Estatística. Dos resultados dêste censo sabe-se que a população da cidade de Limeira era de 12.438 habitantes, ignorando-se a margem de êrro. Mais dois censos nos deram as populações da mesma cidade em 1940 e 1950, que eram respectivamente de 17.241 habitantes e 27.962 habitantes. Temos, pois, um caso de três populações não equidistantes no tempo, e que pode ser estudado pelo nosso processo.

3.2 — *Dados Gerais*: os dados necessários são fornecidos no Quadro I.

QUADRO I

DADOS POPULACIONAIS DA CIDADE DE LIMEIRA

Datas		Populações		$\frac{P - P_0}{P_0} \times 100$
Símbolo	Anos	Símbolo	Habitantes	%
T_0	1.934	P_0	12.438	—
T_1	1.940	P_1	17.241	38,5
T_2	1.950	P_2	27.962	124,5

Pelo aumento rápido da população, conclui-se que em 1.950 o "estado logístico" desta cidade deveria estar em tôrno do seu ponto de inflexão.

3.3 — *Cálculo de Δt*: a equação (31) (ref. 1) fornece:

$$t_n = \frac{T_n - T_0}{i} \tag{51}$$

fazendo:

$$i = 6 \text{ anos} \tag{52}$$

teremos:

$$\begin{cases} t_0 = \dfrac{T_0 - T_0}{i} = 0 \\[2mm] t_1 = \dfrac{T_1 - T_0}{i} = \dfrac{1.940 - 1.934}{6} = 1{,}0 \\[2mm] t_2 = \dfrac{T_2 - T_0}{i} = \dfrac{1.950 - 1.934}{6} = 2{,}666667 \end{cases} \qquad (53)$$

pela equação (6), aplicada a n = 1 e n = 2 vem:

$$\begin{cases} \Delta t_1 = t_1 - t_0 = 1{,}0 - 0 = 1{,}0 \\ \Delta t_2 = t_2 - t_1 = 2{,}666667 - 1{,}0 = 1{,}666667 \end{cases} \qquad (54)$$

e pelas (17) e (18):

$$k = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{1{,}666667}{1{,}0} = 1{,}666667 \qquad (55)$$

$$\boxed{k = 1{,}666667}$$

$$1 + k = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{1{,}0 + 1{,}666667}{1{,}0} = 2{,}666667 \qquad (56)$$

$$\boxed{1 + k = 2{,}666667}$$

3.4 — *Cálculo de* k_{10}: êste valor é constante, e é dado pela (38):

$$k_{10} = \log_{10} P_2 - (1 + k) \log_{10} P_1 + k \log_{10} P_0$$

$$k_{10} = \log_{10} (27.962) - 2{,}666667 \log_{10} (17.241) + 1{,}666667 \log_{10} (12.438)$$

calculando vem:

$$\boxed{k_{10} = -\ 0{,}026347} \qquad (57)$$

3.5 — *Determinação de* P'_{s1}: pelo Quadro I vimos que o crescimento da população da cidade de Limeira é rápido. Assim, poderemos supor que o seu "estado logístico" esteja próximo do ponto de inflexão. Como não sabemos a "duração" dêste crescimento rápido poderemos admitir que:

$$P'_{s1} = 4\,P_2 = 4 \times 27.962 \qquad (58)$$

$$\boxed{P'_{s1} = 111.848}$$

3.6 — *Emprego da Fôlha de Cálculo*: a fôlha de cálculo simplifica e metodiza a determinação da raiz exata, ou satisfatória, da equação (19), ou seja P_s.

Ela foi feita, entre as colunas **1** e **13** para se calcular o numerador da equação (40), e entre as colunas **14** e **18** para se calcular o denominador da mesma equação A coluna **19** dá o valor de "h".

Tôdas as operações estão indicadas na própria fôlha de cálculo, dispensando explicações. Todo número em negrito indica a coluna correspondente. Como tôda fôlha de cálculo, cada linha é independente da anterior na maioria de suas caselas, exceto nas poucas caselas funcionalmente dependentes de linhas anteriores. No nosso caso, as únicas caselas que dependem da linha anterior são as da coluna **1**, que estão ligadas do seguinte modo: casela **1** da linha "n" calcula-

CIDADE: Limeira

$P_0 = 12.438$ $k = 1,666667$

$P_1 = 17.241$ $1 + k = 2,666667$

$P_2 = 27.962$ $k_{10} = -0,026347$

FOLHA DE CÁLCULO PARA A RESOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO LOGÍSTICA

CALC.: J. C. Dias de Moraes

DATA: Março de 1.957

P'_s 1	p'_0 2	$\log p'_0$ 3	$k \log p'_0$ 4	p'_2 5	$\log p'_2$ 6	4 + 6 7	p'_1 8	$\log p'_1$ 9	$(1+k) \log p'_1$ 10
111.848	99.410	4,997430	8,329047	83.886	4,923696	13,252743	94.607	4,975925	13,269130
65.953	53.515	4,728480	7,880797	37.991	4,579681	12,460478	48.712	4,687638	12,500365
77.405	64.967	4,812692	8,021150	49.443	4,694107	12,715257	60.164	4,779338	12,744898
82.279	69.841	4,844107	8,073508	54.317	4,734930	12,808438	65.038	4,813166	12,835106
82.858	70.420	4,847700	8,079497	54.896	4,739538	12,819035	65.617	4,817019	12,845381

$P_s = P'_{s5} + h_5 = 82.858 - 2 = 82.856$ habitantes

$10 + k_{10}$ 11	11 — 7 12	2,3026 × 12 13	$\frac{k}{p'_0}$ 14	$\frac{1}{p'_2}$ 15	14 + 15 16	$\frac{1+k}{p'_1}$ 17	16 — 17 18	$\frac{13}{18}$ 19
13,242783	— 0,009960	— 0,022934	0,0000167655	0,0000119209	0,0000286864	0,0000281867	+ 0,0000004997	— 45.895
12,474018	+ 0,013540	+ 0,031177	0,0000311439	0,0000263220	0,0000574659	0,0000547435	+ 0,0000027224	+ 11.452
12,718551	+ 0,003294	+ 0,007585	0,0000256540	0,0000202253	0,0000458793	0,0000443232	+ 0,0000015561	+ 4.874
12,808759	+ 0,000320	+ 0,000737	0,0000238637	0,0000184104	0,0000422741	0,0000410016	+ 0,0000012725	+ 579
12,819034	— 0,000001	— 0,000002	0,0000236675	0,0000182162	0,0000418837	0,0000406398	+ 0,0000012439	— 2

da assim: casela **1** da linha "n—1" mais (soma algébrica) o valor da casela **19** linha "n—1". Exemplo: valor de P'_{s3} = 77.405 é dado por:

$$P'_{s2} + \mathbf{19} \text{ (linha 2)} = 65.953 + 11.452 = 77.405 \tag{59}$$

A coluna **1** segue sempre a equação (42) generalizada, ou seja:

$$P'_{sn} = P'_{s\,n-1} + h_{n-1} \tag{60}$$

Isto quer dizer que o último valor de P'_s é igual ao seu valor anterior mais (soma algébrica) o último valor achado de "h", que é dado na coluna **19**.

Quando o valor da coluna **19**, que é o "h", que se aproxima de zero, em valor absoluto, atinge-se a aproximação desejada. E' evidente que a aproximação "a zero" do valor da coluna **19** é uma aproximação relativa. No nosso caso esta aproximação "a zero" e "boa" para h = 1,8 ≅ — 2, pois neste caso o êrro para o P'_s correspondente é de:

$$e = \frac{-2 \times 100}{82.858} = -0{,}0027\% \tag{61}$$

o qual é mais do que satisfatório.

3.7 — *Verificação da Raiz*: no nosso exemplo a precisão foi extrema, pois o êrro do último valor de "h" sôbre o último valor de P'_s foi desprezível. Maiores erros são perfeitamente admissíveis na prática.

A raiz achada foi:

$$P_s = P'_{s5} + h_5 = 82.858 - 2 = 82.856 \text{ hab} \tag{62}$$

$$\boxed{P_s = 82.856 \text{ hab}}$$

Êste valor é perfeitamente satisfatório, conforme mostra a verificação seguinte. Aplicando êste valor à equação (15), forma logarítmica das (16) e (19) temos:

$$\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_2} - 1\right) = (1 + k) \log_{10}\left(\frac{P_s}{P_1} - 1\right) - k \log_{10}\left(\frac{P_s}{P_0} - 1\right) \tag{63}$$

substituindo os valores numéricos vem sucessivamente:

$$\log_{10}\left(\frac{82.856}{27.962} - 1\right) = 2{,}666667 \log_{10}\left(\frac{82.856}{17.241} - 1\right) - $$
$$- 1{,}666667 \log_{10}\left(\frac{82.856}{12.438} - 1\right) \tag{64}$$

e então:

$$0{,}29299 \cong 1{,}54785 - 1{,}25487 = 0{,}29298 \tag{65}$$

com um êrro muito pequeno, que é devido pràticamente aos cálculos aritméticos, como bem se vê.

3.8 — *Determinação de "b"*: o valor de "b" é dado pela (4). Os valores de φ_1 e φ_0 calculam-se pelo nosso processo dado em 2.2 (ref. 1):

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{P_1}{P_s} = \dfrac{17.241}{82.856} = 0{,}2081 \\[2ex] N_0 = \dfrac{P_0}{P_s} = \dfrac{12.438}{82.856} = 0{,}1501 \end{cases} \tag{66}$$

entrando na tabela da função logística (ref. 6), com os valores achados de N_1 e N_0, temos respectivamente, por interpolação:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -0{,}663 \\ \varphi_0 = -0{,}867 \end{cases} \tag{67}$$

e então pela (4):

$$b = \frac{2(\varphi_1 - \varphi_0)}{\Delta t_i} = \frac{2(-0{,}668 + 0{,}867)}{8} \tag{68}$$

$$\boxed{b = 0{,}398}$$

3.9 — *Determinação de "a"*: tendo-se o valor de φ_0 calcula-se "a" pela equação (10):

$$a = -2\varphi_0 = -2(-0{,}867) = +1{,}734 \tag{69}$$

$$\boxed{a = +1{,}734}$$

3.10 — *Equação Logística*: com as três constantes conhecidas da equação logística, ela toma a forma:

$$P = \frac{P_s}{1 + e^{a - bt}} = \frac{82.856}{1 + e^{1{,}734 - 0{,}398t}} \tag{70}$$

3.11 — *Curva Logística*: com a equação logística conhecida constrói-se fàcilmente a curva logística. Para isso usa-se o processo indicado no nosso primeiro trabalho (ref. 7). Constrói-se o Quadro II conforme indicado naquele trabalho, e com os dados obtidos desenha-se a curva logística para a cidade de Limeira, conforme consta da Fig. 1.

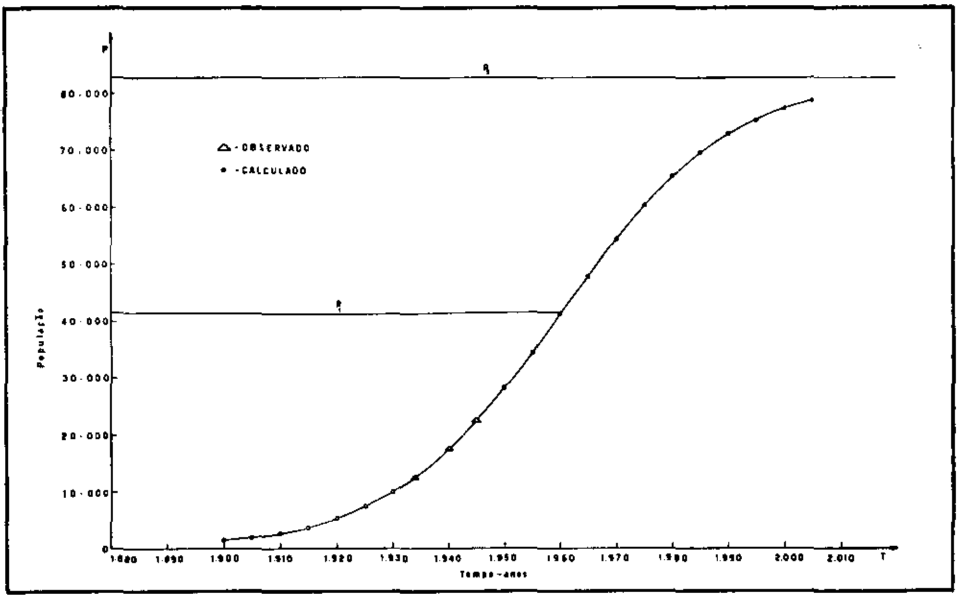

FIG. Nº 1
ESTIMATIVA DA POPULAÇÃO DE LIMEIRA

3.12 — *Verificação de P_s quando P_0, P_1 e P_2 são Equidistantes no Tempo*: uma verificação interessante consiste em se calcular o P_s novamente a partir de três populações equidistantes no tempo, e que podem ser retiradas do Quadro II.

Tomemos as populações dos anos 1.900, 1.950 e 2.000, e apliquemos o processo adotado no nosso primeiro trabalho (ref. 8). A equação de P_s para êsse caso é:

$$P_s = \frac{P_0 + P_2 - 2m}{1 - \frac{m}{P_1}} \tag{71}$$

QUADRO II

ESTIMATIVA DE POPULAÇÃO PARA A CIDADE DE LIMEIRA

Datas T anos	Observado População	φ	N	Estimativa de População
1.900	—	— 1,996	0,01813	1.502
1.905	—	— 1,830	0,02509	2.079
1.910	—	— 1,664	0,03462	2.869
1.915	—	— 1,498	0,04760	3.944
1.920	—	— 1,332	0,06513	5.397
1.925	—	— 1,166	0,08852	7.335
1.930	—	— 1,000	0,1192	9.877
1.934	12.438	— 0,867	0,1511	12.520
1.940	17.241	— 0,668	0,2082	17.251
1.945	—	— 0,502	0,2681	22.215
1.950	27.962	— 0,336	0,3381	28.015
1.955	—	— 0,170	0,4158	34.453
1.960	—	— 0,004	0,4980	41.264
1.965	—	+ 0,162	0,5805	48.100
1.970	—	+ 0,328	0,6538	54.174
1.975	—	+ 0,494	0,7287	60.380
1.980	—	+ 0,660	0,7892	65.393
1.985	—	+ 0,826	0,8391	69.528
1.990	—	+ 0,992	0,8791	72.842
1.995	—	+ 1,158	0,91020	75.419
2.000	—	+ 1,324	0,93388	77.381
2.005	—	+ 1,490	0,95166	78.855

Fazendo:

$$\begin{cases} P_0 = 1.502 \text{ hab} & T_0 = 1.900 \text{ anos} \\ P_1 = 28.015 \text{ hab} & T_1 = 1.950 \text{ anos} \\ P_2 = 77.381 \text{ hab} & T_2 = 2.000 \text{ anos} \end{cases} \tag{72}$$

de tal modo que:

$$i = T_1 - T_0 = T_2 - T_1 = 1.950 - 1.900 = 50 \text{ anos} \tag{73}$$

virá para a condição de passagem:

$$m = \frac{P_0 P_2}{P_1} = \frac{1.502 \times 77.381}{28.015} = 4.149 \tag{74}$$

sendo que:

$$\begin{cases} 28.015 > 4.149 \\ P_1 > m \end{cases} \tag{75}$$

ficando, portanto, satisfeita a condição de passagem.

Aplicando a equação (71):

$$P_s = \frac{1.502 + 77.381 - 2 \times 4.149}{1 - \dfrac{4.149}{1.502}} \tag{76}$$

Resolvendo:

$$P_s = \frac{70.586}{0,85191} = 82.555,9 \text{ hab} \tag{77}$$

Ora, o P_s achado pelo processo das populações não equidistantes no tempo vale 82.556 hab, ou mais precisamente 82.856,2 hab, diferença perfeitamente desprezível em face da complexidade dos cálculos aritméticos.

SUMÁRIO

O Autor generaliza as equações fundamentais da Logística, para o caso em que as *três populações conhecidas não sejam equidistantes no tempo.*

Resolve estas equações, e apresenta uma fôlha de cálculo para facilitar a sua aplicação prática.

Apresenta um exemplo completo de cálculo aplicado à cidade de Limeira, São Paulo, Brasil.

SUMMARY

The Author generalizes the Logistic fundamental equations, for the case in which the three known populations are not equidistant in the time.

He solves such equations, and gives a sheet model in order to simplify its practical application.

He presents an example applied to the City of Limeira, São Paulo, Brazil.

BIBLIOGRAFIA

1 — J. C. Dias de Moraes, "*A Normal Logística*", Revista do D. A. E., N.º 26, (Set. de 1.955), S. Paulo.

2 — Id., eq. (44).

3 — Ib., eq. (36a).

4 — Ib., eq. (32).

5 — Ib., eq. (37).

6 — Ib., Quadro I — Função Logística Normal.

7 — Ib., Parágrafo 2.8.

8 — Ib., eq. (62), (63), (64), e (65).