DINÂMICA DAS MASSAS VARIÁVEIS

Eng.º EDUARDO GOMES DOS REIS (*)

É nosso intuito nêste trabalho, apenas deduzir as equações fundamentais da dinâmica das massas variáveis, isto é, fazer o estudo do movimento de um corpo sujeito à ação de uma fôrça externa, havendo ao mesmo tempo variação da sua massa.

Vamos supor então um corpo de massa total M_0, da qual M_1 será a massa permanente, e M_2 a massa variável. Nessas condições, evidentemente

$$M_0 = M_1 + M_2$$

Chamaremos F à fôrça atuante sôbre o corpo, e t_1 o intervalo de tempo da sua atuação. Admitiremos ainda que após êsse período, a massa variável tenha se extinguido, restando apenas a massa permanente. Admitiremos ainda que a fôrça F tenha módulo constante, e que a extinção da massa M_2 se faça uniformemente.

Nessas condições, em um instante qualquer t compreendido entre zero e t_1, a massa total do corpo será

$$M = M_1 + M_2 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)$$

Assim sendo

$$\gamma = \frac{F}{M} = \frac{F}{M_1 + M_2 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)} =$$

$$= \frac{F\, t_1}{M_0\, t_1 - M_2\, t} \qquad (1)$$

(*) **Engenheiro Assessor da Diretoria de Obras da SAEC.**

Mas

$$dv = \gamma\, dt = \frac{F\, t_1\, dt}{M_0\, t_1 - M_2\, t}$$

e:

$$v = \int \frac{F\, t_1\, dt}{M_0\, t_1 - M_2\, t} =$$

$$= - \frac{F\, t_1}{M_2} \ln (M_0\, t_1 - M_2\, t) + C$$

Em um instante qualquer t', compreendido entre zero e t_1, a velocidade terá o seguinte valor:

$$v = - \frac{F\, t_1}{M_2} \Big[\ln (M_0\, t_1 - M_2\, t) \Big]_0^{t'}$$

ou:

$$v = - \frac{F\, t_1}{M_2} \ln \frac{M_0\, t_1 - M_2\, t'}{M_0\, t_1}$$

Generalizando, teremos a fórmula da velocidade em um dado instante t, compreendido entre zero e t_1. Assim sendo:

$$v = - \frac{F\, t_1}{M_2} \ln \frac{M_0\, t_1 - M_2\, t}{Mo\, t_1} \qquad (2)$$

Passaremos a seguir à determinação do espaço percorrido pelo corpo durante o intervalo de tempo t_1, nas condições anteriormente estabelecidas. Temos:

$$de = v\, dt$$

$$de = -\frac{F\ t_1}{M_2} \ln \frac{M_0\ t_1 - M_2\ t}{M_0\ t_1}\ dt$$

$$e = -\frac{F\ t_1}{M_2} \int \ln \frac{M_0\ t_1 - M_2\ t}{M_0\ t_1}\ dt$$

O espaço percorrido até o instante t', compreendido entre zero e t_1, será:

$$e = \frac{F\ M_0\ t_1^2}{M_2^2} \left[\frac{M_2\ t}{M_0\ t_1} - 1 + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{M_2\ t}{M_0\ t_1}\right) \ln \left(1 - \frac{M_2\ t}{M_0\ t_1}\right) \right]_0^{t'}$$

ou

$$e = \frac{F\ M_0\ t_1^2}{M_2^2} \left[\frac{M_2\ t'}{M_0\ t_1} + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{M_2\ t'}{M_0\ t_1}\right) \ln \left(1 - \frac{M_2\ t'}{M_0\ t_1}\right) \right]$$

Generalizando novamente, teremos a fórmula do espaço percorrido até um dado instante t compreendido entre zero e t_1, como seja:

$$e = \frac{F\ M_0\ t_1^2}{M_2^2} \left[\frac{M_2\ t}{M_0\ t_1} + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{M_2\ t}{M_0\ t_1}\right) \ln \left(1 - \frac{M_2\ t}{M_0\ t_1}\right) \right] \quad (3)$$

Após decorrido o intervalo de tempo t_1, a velocidade e a aceleração terão atingido o valor máximo. Esta última desaparece em seguida. Assim:

$$\gamma_{max} = \frac{F\ t_1}{M_0\ t_1 - M_2\ t_1} = \frac{F}{M_1} \quad (4)$$

$$v_{max} = -\frac{F\ t_1}{M_2} \ln \frac{M_0\ t_1 - M_2\ t_1}{M_0\ t_1} =$$

$$= \frac{F\ t_1}{M_2} \ln \frac{M_0}{M_1} \quad (5)$$

Por sua vez, o espaço percorrido pelo corpo ao fim do intervalo de tempo t_1, será:

$$e = \frac{F\ M_0\ t_1^2}{M_2^2} \left(\frac{M_2}{M_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{M_1}{M_0} \ln \frac{M_1}{M_0} \right) \quad (6)$$

Vamos supor agora que a fôrça F seja proveniente da transformação da massa variável M_2, em gases ejetados à velocidade relativa V.

Nessas condições, o impulso total da fôrça F durante o intervalo de tempo t_1, foi:

$$F\ t_1 = M_2\ V \quad (7)$$

Levando esse valor às equações 4, 5 e 6, teremos:

$$\gamma_{max} = \frac{M_2\ V}{M_1\ t_1} \quad (8)$$

$$v_{max} = V \ln \frac{M_0}{M_1} \quad (9)$$

$$e = V\ t_1 \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \ln \frac{M_1}{M_0}\right) =$$

$$= V\ t_1 \left(1 - \frac{M_1}{M_2} \ln \frac{M_0}{M_1}\right) \quad (10)$$

A título de curiosidade, vamos supor uma sonda, de um único estágio, com os seguintes elementos:

Pêso total, 10 t

Pêso do combustível, 9 t

Velocidade relativa de ejeção dos gases, 2000 m/s.

Tempo de ação da Fôrça F, 120 s.

Nessas condições temos:

máxima aceleração atingida:

$$\gamma_{max} = \frac{9 \times 2000}{120} = 150\ m/s^2 \quad \text{ou} \quad 15{,}3\ g$$

máxima velocidade alcançada:

$$v_{max} = 2000 \ln 10 \cong 4600\ m/s$$

espaço percorrido:

$$e = 2000 \times 120 \left(1 - \frac{1}{9} \ln 10\right)$$

$$\cong 178600\ m$$

Se a sonda partiu da superfície tererstre, desprezada a resistência da tmosfera, êsses valores ficam reduzidos a:

$$v_{max} = 4600 - 9,8 \times 120 \cong 3400 \text{ m/s}$$

$$e = 178600 - \frac{1}{2} \times 9,8 \times 14400 \cong 108000 \text{ m}$$

A resistência da atmosfera, que dependerá do tamanho, forma aerodinâmica, e velocidade da sonda,como também da densidade das diversas camadas de ar, poderá reduzir aqueles valores a 70% aproximadamente. Nessas condições:

$$v_{max} \sim 2044 \text{ m/s}$$

$$e \sim 54 \text{ km}$$

É evidente que, após a extinção da fôrça F, a sonda continuará em ascenção.

A altura máxima alcançada, após ter cessado a ação da fôrça F, será:

$$e_1 = \frac{2044^2}{2 \times 9,8} \cong 213.000 \text{ m}$$

A essa altitude a resistência da atmosfera terá pouca influência sôbre o movimento do corpo. Admitimos g constante para simplificar o exemplo, e desprezamos a curvatura da tragetória.

Desprezadas as resistências externas, o movimento desse corpo poderia ainda ser representado pela equação diferencial

$$\frac{d^2e}{dt^2} = \frac{F \ t_1}{M_0 \ t_1 - M_2 \ t}$$