APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE A PROBLEMAS DE ENGENHARIA SANITÁRIA

Eng.º WALTER DEL PICCHIA (*)

O presente trabalho mostra como um problema de engenharia sanitária pode ser resolvido com o emprego da Transformada de Laplace (TL), ferramenta largamente utilizada no campo da engenharia de eletricidade.

O trabalho foi dividido em três partes: na primeira o problema é resolvido sem aplicação da TL, mas por extensão da Lei de Chick usual; na segunda, a Lei de Chick é generalizada, obtendo-se então a solução geral com emprego da TL; e na terceira, apresentamos um pequeno resumo sobre a Transformada de Laplace.

1 EXTENSAO DA LEI DE CHICK

1.1 Lei de Chick

Consideremos um trecho de rio com velocidade constante v.

Se num dado ponto 0 lançarmos N_0 bactérias, um dos modelos para o cálculo das bactérias remanescentes num ponto x a jusante de 0 é a Lei de Chick [1]:

$$\frac{dy}{dt} = K\,(N_0 - y) = K\,B \qquad (1)$$

onde:

y = número de bactérias eliminadas até o tempo $t = x/v$.

N_0 = número de bactérias lançadas no ponto 0.

B = número de bactérias remanescentes no tempo $t = x/v$.

(*) PLANIDRO — Engenheiros Consultores S.A. Departamento de Engenharia de Eletricidade da Escola Politécnica da USP.

Portanto, a Lei de Chick admite que a velocidade de eliminação das bactérias é proporcional ao número de bactérias remanescentes; a constante de proporcionalidade é K.

A resolução de (1) fornece:

$$B = N_0\, e^{-Kt} \qquad (2)$$

1.2 Problema

Deseja-se determinar o número de bactérias remanescentes B no ponto x (ou no tempo t) para um lançamento de bactérias distribuído ao longo do rio, lançamento este de **d** bactérias por unidade de comprimento.

A Lei de Chick, cuja solução é (2), não resolve o problema acima, pois admite um lançamento concentrado de N_0 bactérias no ponto 0.

Mostremos a seguir como podemos resolver o problema dado, utilizando (2).

1.3 Resolução do problema

Seja um trecho do rio de comprimento x. O número total de bactérias lançadas de 0 a x é $N_0 = x.d$ bactérias. Se lançarmos essa quantidade no ponto 0, o número B de bactérias remanescentes em t é dado por $N_0\, e^{-Kt}$ (curva A da figura 1). Vamos agora distribuir o lançamento $N_0 = x.d$ em $n = 10$ lançamentos iguais, espaçados igualmente, de 0 a x. A curva resultante é composta de trechos de exponenciais e é vista na figura 1 (curva D). Desejamos determinar o valor B(t) dado pelo ponto X'.

No traçado da curva D utilizamos as propriedades das exponenciais, quais sejam:

TABELA I

ponto I : h	ponto I' : $h\alpha$
ponto II : $h + h\alpha$	ponto II' : $(h + h\alpha)\,\alpha = h\alpha + h\alpha^2$
ponto III : $h + h\alpha + h\alpha^2$	ponto III' : $(h + h\alpha + h\alpha^2)\,\alpha = h\alpha + h\alpha^2 + h\,\alpha^3$
.	.
.	.
.	.
ponto X : ...	ponto X' : $h\alpha + h\alpha^2 + \ldots + h\alpha^{10} = h\,(\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{10})$

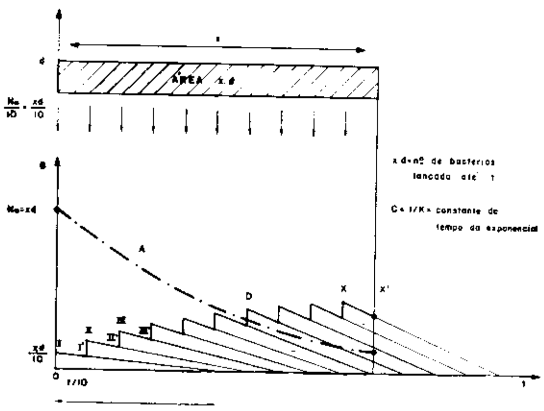


Fig. 1

Dada a exponencial $y = A\,e^{-Kt}$, a tangente à curva no ponto $y(0) = A$ corta o eixo dos t no ponto $C = \dfrac{1}{K}$ (ver figura 2). O valor C recebe o nome de constante de tempo e o valor de y no ponto $t = C$ é dado por

$$y\,(C) = A\;e^{-KC} = A\;\frac{1}{e} \cong 0{,}37\;.\;A$$

Além disso, para t pequenos a exponencial confunde-se com a tangente.

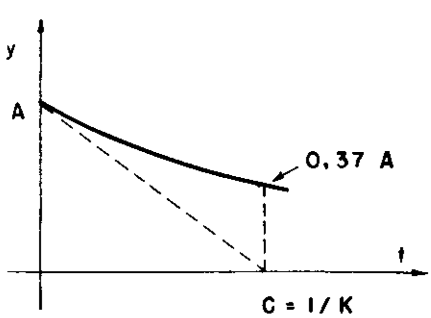


Fig. 2

No figura 1 admitimos que I I', II II', etc., são segmentos de reta e estes segmentos foram admitidos sobre a tangente à exponencial.

Portanto, o ponto X' (que fornece o valor B(t) procurado) é uma aproximação, e o erro cometido poderia ser calculado. Porém, quando o lançamento total for dividido em n partes e fizermos n crescer, como será visto adiante, o erro cometido tenderá a zero.

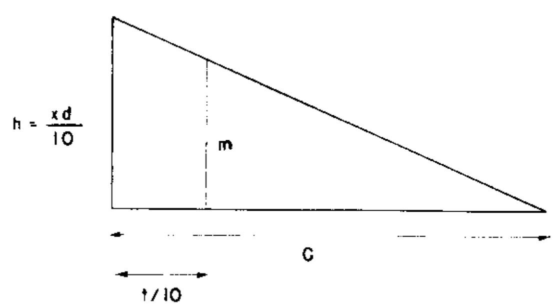
Determinemos o valor de B no ponto X':

a) Conhecidos os pontos I, II, etc., os pontos I', II', etc., são determinados por (ver figura 3):

$$m = h\;.\;\alpha$$

$$\text{com}\;\; \alpha = 1 - \frac{t}{10\;C} = 1 - \frac{\gamma}{10}$$

$$\text{e}\qquad \gamma = \frac{t}{C} = t\,K$$



$$\frac{h}{C} = \frac{m}{C - \frac{t}{10}} \quad \therefore \quad m = h\;\left(1 - \frac{t}{10\,C}\right)$$

Fig. 3

b) Os valores I, I', II, II', etc., são determinados sucessivamente, obtendo-se a tabela I.

Generalizando para n qualquer obtemos:

$$B = h\;(\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n) = h\;\frac{\alpha^n\;.\;\alpha - \alpha}{\alpha - 1} =$$

$$= h\;\frac{\alpha^{n+1} - \alpha}{\alpha - 1} \qquad (3)$$

Substituindo

$h = x \,.\, d/n$ e $\alpha = 1 - \dfrac{\gamma}{n}$ em (3) obtemos:

$$B = x\,d\left[\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{n} - \frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)^{n+1}\right]$$

Exemplo:

Para $n = 10$ e $\gamma = \dfrac{t}{C} = 2$ obtemos:

$$B = x\,d\left[0{,}5 - 0{,}1 - \frac{1}{2}\left(1 - 0{,}2\right)^{11}\right] =$$

$$= 0{,}36\ N_0$$

Façamos agora n tender a ∞ (é o mesmo que fazer a distribuição de bactérias tender a **d** bactérias por unidade de comprimento). B(t) será dado por:

$$B = \lim_{n \to \infty} x\,d\left[\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{n} - \frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)^{n+1}\right]$$

Portanto:

$$B = \frac{x\,d}{\gamma}\left[1 - \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)^{n+1}\right]$$

pois:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \quad e \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Determinemos:

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)^{n+1}$$

Temos:

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} .$$

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n},$$

$$\text{pois} \quad \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

Fazendo a troca de variáveis $a = -n$, obtemos:

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} =$$

$$\lim_{a \to -\infty}\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{-a} =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{a}\right)^{a}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{a \to -\infty}\left(1 + \dfrac{1}{a}\right)^{a}} = \frac{1}{e}$$

Portanto:

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)^{n} .$$

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right) = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)^{n} \quad \text{pois}$$

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right) = 1 \ \text{para} \ \frac{1}{\gamma} = \frac{C}{t} \neq 0$$

Fazendo a troca de variáveis $y = \dfrac{n}{\gamma}$, obtemos:

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)^{n} = \lim_{y \to \infty}\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{\gamma y} =$$

$$= \frac{1}{e^{\gamma}} = e^{-\gamma}$$

Portanto:

$$B(t) = \frac{d}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma}\right) = \frac{d}{t\,K}\left(1 - e^{-Kt}\right)$$

ou, como $\dfrac{x}{t} = v$,

$$B(t) = \frac{v\,d}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right) \qquad (4)$$

A fórmula (4) também pode ser escrita:

$$B(t) = \frac{b}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right)$$

onde:

b é o número de bactérias lançadas por unidade de tempo ao longo do rio,

pois:

$$b = \frac{x\,d}{t} = v\,d$$

Exemplo:

Para $t = 2\ C = 2/K$ e $v = x/t$

obtemos:

$$B = \frac{(x/t)}{2/t}\ \frac{d}{}\left(1 - e^{-2}\right) =$$

$$= \frac{x\ d}{2}\left(1 - e^{-2}\right) = 0{,}43\ .\ N_o$$

2. GENERALIZAÇAO PARA QUALQUER FUNÇAO DE DISTRIBUIÇAO

Utilizando a Transformada de Laplace vamos generalizar a Lei de Chick, permitindo que o lançamento de bactérias seja feito de acordo com qualquer função de distribuição desejada. Os casos vistos atrás:

a) Lançamento concentrado de N_o bactérias no ponto 0:

$$B(t) = N_o\ e^{-Kt}$$

b) Lançamento uniformemente distribuído de **b** bactérias por unidade de tempo, ao longo do rio:

$$B(t) = \frac{b}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right)$$

serão casos particulares da generalização que faremos.

2.1 Lei de Chick para qualquer função de distribuição

Seja f(t) a função de distribuição do lançamento de bactérias ao longo do rio (ver figura 4).

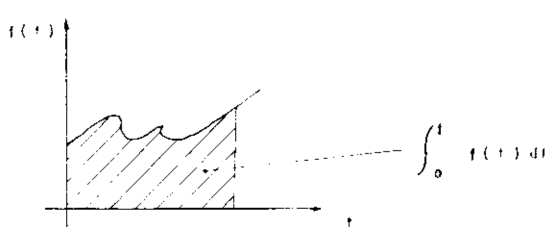


Fig. 4

O número de bactérias lançadas desde o tempo t = 0 (ponto 0) até o tempo t é dado por:

$$\int_o^t f(t)\ dt$$

Portanto, a Lei de Chick pode ser escrita:

$$\frac{dy}{dt} = K\left(\int_o^t f(t)\ dt - y\right) = KB \qquad (5)$$

onde:

y, f(t), K e B têm os significados já citados atrás. f(t) será chamada «função excitação» e y (t) será chamada «função resposta».

Transformando (5) obtemos:

$$s\ Y(s) - \alpha_o = K\ \frac{F\ (s)}{s} - K\ Y(s)$$

com

Y(s) = **L** [y(t)] = Transformada de Laplace de y (t)

e

F(s) = **L** [f(t)] = Transformada de Laplace de f (t)

Como α_o = número de bactérias eliminadas no tempo t = 0, é nulo, vem

$$Y(s) = \frac{K}{s\ (s + K)}\ F(s)$$

$$T(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{s(s + K)}$$

é a «função de transferência» do sistema (relação entre a transformada da função resposta e a transformada da função excitação).

De $\qquad B = \int_o^t f(t)\ dt - y,$

transformando, vem:

$$B(s) = \frac{F(s)}{s} - Y(s) = \frac{F(s)}{s} - \frac{K\ F(s)}{s(s + K)} = \frac{F(s)}{s + K} \qquad (6)$$

com

$$B(s) = \mathbf{L}\ [B(t)]$$

2.2 Aplicação

Vamos aplicar (6) para os dois casos de distribuição já vistos:

a) **Lançamento concentrado de N_0 bactérias no ponto 0.**

A função de distribuição será $f(t) = N_0\delta(t)$ (ver figura 5).

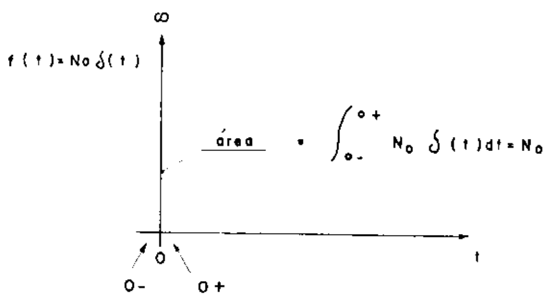


Fig. 5

onde:

$\delta(t)$ é a função impulsiva definida por:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq 0 \\ \infty & \text{para } t = 0 \end{cases}$$

e

$$\int_{0-}^{0+} \delta(t)\ dt = 1$$

Temos:

$$F(s) = \mathbf{L}\ [f(t)] = \mathbf{L}\ [N_0\ \delta(t)] = N_0$$

De (6) vem:

$$B(s) = \frac{N_0}{s + K}$$

Portanto, antitransformando:

$B(t) = \mathbf{L}^{-1}\ [B(s)] = N_0\ e^{-Kt}$, como já foi visto.

b) Lançamento uniformemente distribuído de **b** bactérias por unidade de tempo.

A função de distribuição será $f(t) = b$ (ver figura 6).

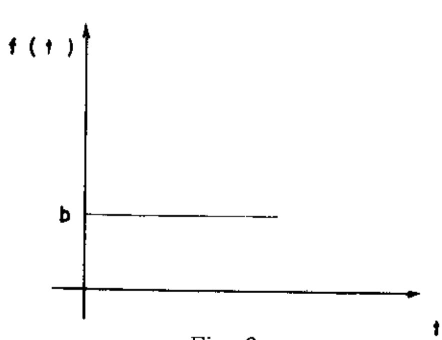


Fig. 6

Temos:

$$F(s) = \mathbf{L}\ [f(t)] = \mathbf{L}\ [b] = \frac{s}{b}$$

De (6) vem:

$$B(s) = \frac{b}{s(s + K)}$$

Portanto, antitransformando

$B(t) = \mathbf{L}^{-1}\ [B(s)] = \frac{b}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right)$, como já foi visto.

3. A TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE COMO MÉTODO DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

3.1 Introdução

Apresentamos a seguir um resumo introdutório à Transformação de Laplace, sem nenhuma preocupação de rigor matemático. O leitor interessado poderá consultar [2] da bibliografia para um primeiro estudo; outras publicações, para um estudo mais profundo, são indicadas na mesma referência [2].

A Transformada de Laplace é utilizada de modo semelhante ao uso dos logaritmos para efetuar produtos:

a) Sejam os números A e B

b) Desejamos $P = A \times B$

c) Determinamos $a = \log A$ e $b = \log B$ (transformação)

d) Calculamos $p = a + b$

e) Determinamos P = anti-log p (antitransformação)

f) P é o produto procurado.

A utilização da Transformação de Laplace para resolver equações diferenciais lineares, a coeficientes constantes, segue um esquema semelhante:

a) Seja a equação diferencial (por exemplo de 2.ª ordem),

$$a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2\ y = z(t)$$

com a_0, a_1 e a_2 constantes e $z(t)$ dada (função excitação).

b) Desejamos resolver a equação, ou seja, determinar y em função de t:

$$y = f(t) \text{ (função resposta)}$$

c) Transformamos a equação acima utilizando a Transformação de Laplace, obtendo:

$$a_0[s^2\, Y(s) - s\,\alpha_0 - \alpha_1] + a_1\,[s\,Y(s) - \alpha_0] + $$
$$+ a_2\, Y(s) = Z(s)$$

onde:

$Y(s) = \mathbf{L}\,[y(t)]$ = Transformada de Laplace de y(t)

$Z(s) = \mathbf{L}\,[z(t)]$ = Transformada de Laplace de z(t)

α_0 = Valor inicial de y (dado)

α_1 = Valor inicial de $\dfrac{dy}{dt}$ (dado)

d) Calculamos Y(s), obtendo:

$$Y(s) = \frac{Z(s) + a_0\,\alpha_0\, s + a_0\,\alpha_1 + a_1\,\alpha_0}{a_0\, s^2 + a_1\, s + a_2}$$

e) Antitransformamos Y(s):

$$y(t) = \mathbf{L}^{-1}\,[y(t)]$$

f) y(t) é a solução procurada.

No cálculo do produto $P = A \times B$ por meio de logarítmos podemos utilizar-nos de tabelas para determinar os logarítmos de A e B (transformação), e para determinar o antilogaritmo de p (antitransformação).

Do mesmo modo, na resolução de equações diferenciais por meio da Transformação de Laplace, podemos utilizar-nos de tabelas para determinar a transformada da excitação, $Z(s) = \mathbf{L}\,[z(t)]$ e para determinar a anti-transformada da resposta

$$y(t) = \mathbf{L}^{-1}\,[Y(s)]$$

3.2 Definições e algumas propriedades

Embora existam tabelas que fornecem a Transformada de Laplace de centenas de funções (ver [3]), é útil conhecermos a definição da TL, aplicando-a para alguns casos simples.

Seja uma função f(t) contínua, ou no máximo com um número finito de descontinuidades, definida para os $t > 0$.

A transformada de Laplace de f(t) é dada por :

$$\mathbf{L}\,[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, f(t)\, dt$$

Decorre imediatamente da definição:

a) $\mathbf{L}\,[a\, f(t)] = a\,\mathbf{L}\,[f(t)]$, com a = constante

b) $\mathbf{L}\,[f_1(t) + f_2(t)] = \mathbf{L}\,[f_1(t)] + \mathbf{L}\,[f_2(t)]$

ou seja: a Transformação de Laplace é uma operação linear.

Calculemos as transformadas de algumas funções simples:

a) Função degrau na origem, h(t)
Essa função é definida por:

$$h(t) = \begin{cases} o \text{ para } t < o \\ 1 \text{ para } t > o \end{cases}$$

Aplicando a definição, obtemos:

$$\mathbf{L}\,[h(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\, h(t)\, dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\,.\,1\,.\,dt = \left[-\frac{1}{s}\, e^{-st}\right]_{t=o}^{t=\infty}$$

$$= -0 + \frac{1}{s}\, e^0 = \frac{1}{s}$$

b) Função exponencial e^{at}

Obtemos:

$$\mathbf{L}\,[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{(-s+a)t}\, dt = \frac{1}{s - a}$$

Do mesmo modo, aplicando a definição, obtemos:

s) Função impulsiva, $\delta(t)$

Esta função é definida por (ver figura 5):

$$\delta(t) = \begin{cases} o \text{ para } t \neq o \\ \infty \text{ para } t = o \end{cases}$$

e

$$\int_{0-}^{0+} \delta(t)\, dt = 1$$

Deduz-se:

$$\mathbf{L}\,[\delta(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\delta(t)\,dt = 1$$

d) Função seno, sen.wt

$$\mathbf{L}\,[\text{sen } wt] = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

Apresentamos a seguir algumas propriedades que facilitam a obtenção das TL das funções desejadas.

Sendo

$F(s) = \mathbf{L}\,[f(t)]$, as seguintes propriedades são válidas:

a) Derivada da transformada:

$$\frac{d}{ds} F(s) = -\mathbf{L}\,[t \,.\, f(t)]$$

b) Translação de s:

$$F(s + a) = \mathbf{L}\,[e^{-at} f(t)]$$

c) Translação de t:

$$\mathbf{L}\,[f(t - a)] = e^{-as} F(s)$$

d) Produto por constante:

$$\mathbf{L}\,[f(at)] = \frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right)$$

e) Transformada da derivada:

$$\mathbf{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\,F(s) - \alpha_0$$

com α_0 = valor inicial de $f(t)$

Por aplicação sucessiva desta expressão obtemos a derivada de qualquer ordem, para quaisquer condições iniciais.

No caso de condições iniciais nulas obtemos:

Para $\alpha_0 = 0$ obtem-se $\mathbf{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\,F(s)$

Generalizando, para valores iniciais nulos, obtemos para as derivadas 2.ª, 3.ª, ... n — ésima:

$$\mathbf{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2\,F(s)$$

$$\mathbf{L}\left[\frac{d^3f}{dt^3}\right] = s^3\,F(s)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\mathbf{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right] = s^n\,F(s)$$

f) Transformada da integral

$$\mathbf{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Agradecimentos

Agradecemos aos Eng.os J. M. de Azevedo Netto, J. M. Costa Rodrigues, M. Lothar Hess e H. Felício dos Santos pela colaboração recebida.

REFERÊNCIAS

[1] Fair, G. M., Geyer, J. C., and Okum, D. A., Water and Wastewater Engineering, John Wiley and Sons, N. York, 1968.

[2] Orsini, L. Q., Circuitos elétricos, Editora Universidade de São Paulo — Edgard Blücher Ltda., 1971.

[3] Doetsch, G., Handbruch der Laplace — Transformation, Birkhausen, Basel, 1950.